

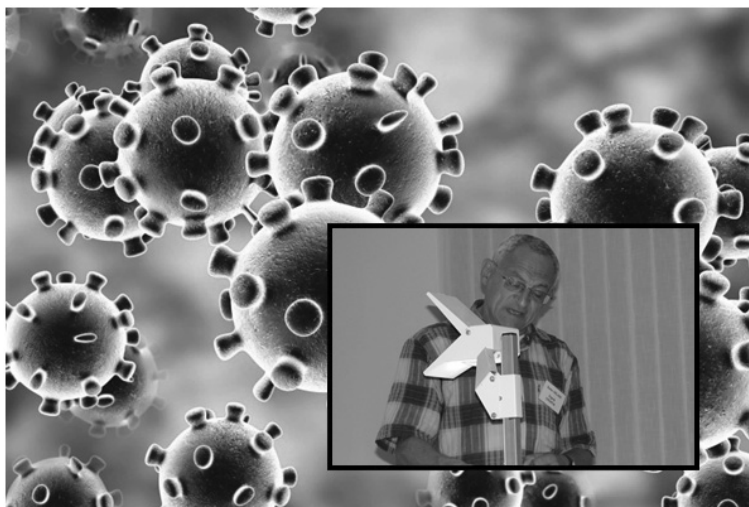
## Koronavirus i malo matematike

Darko Veljan<sup>1</sup>

### Uvod

Iznenadna, nevjerojatna, pogubna i zastrašujuća epidemija, zapravo – pandemija dosad nepoznatog koronavirusa, službenog naziva COVID-19, pojavila se između 15. i 20. prosinca 2019. (a možda i ponešto ranije) na tržnici mesom i ribom u gradu Wuhanu u središnjoj Kini od “samo” 12 milijuna stanovnika, glavnom gradu pokrajine Hubei s oko 60 milijuna stanovnika. Od tamo potječe uzrečica “Kinezi jedu sve na dvije noge osim čovjeka, sve na četiri noge osim stola i sve što leti osim aviona”.

Nevidljivom, nečujnom, neosjetnom, nemirisnom, golemom se brzinom virus proširio nakon Kine diljem svijeta, a posebice u SAD, Europu, Brazil, Indiju, Rusiju, Afriku i drugdje. Od prvog (“službeno”) zaraženog iz prosinca 2019. do kolovoza 2020. (kad je pisan ovaj tekst), u svijetu je zaraženo (okruglo) više od 25 milijuna ljudi, a od toga je umrlih od te bolesti više od milijun ljudi s naznakom daljeg širenja i pogibije sve dok učinkovito cjepivo ne spriječi taj trend. Svjetska zdravstvena organizacija (WHO) i kod nas Stožer za civilnu zaštitu uz HZJZ (Hrvatski zavod za javno zdravstvo) svakodnevno daju upute za ponašanje građana dok traje pandemija, ali unatoč svemu ona ustraje.



Slika 1. Matematički model širenja koronavirusa, [4].

Svakodnevna statistika i brojidba podataka oboljelih i umrlih od korone u Hrvatskoj nalazi se na stranici [koronavirus.hr](https://koronavirus.hr) ([1]), a na svjetskoj razini na Worldometer ([2]). Postoje i drugi izvori, primjerice Wikipedia ([3]). Autor ovog članka je još 13. ožujka 2020. napisao članak *Matematički model širenja koronavirusa*, objavljenog na mrežnoj

<sup>1</sup> Autor je redoviti profesor u miru na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: [darko.veljan@gmail.com](mailto:darko.veljan@gmail.com)

stranici Panopticum.hr, [4]. Tamo su opisane neke činjenice, simptomi zaraze, legende, mitovi, "teorije zavjere" i opisan jednostavni model širenja koronavirusa. Mi ćemo ovdje prikazati taj model i izračunati do koje mjere imate šansu oboljeti od korone.

U međuvremenu su napisane brojne studije, znanstveni, stručni i popularni članci, brojne internetske stranice, nebrojene radio, TV i novinske obrade, mišljenja i razglabanja na društvenim mrežama i sl. Uzroci, simptomi, liječenja i podatci o tom virusu znanstveno pripadaju medicini, farmaciji, biologiji, kemiji i djelomice fizici. No, mi ćemo se ovdje pozabaviti koronavirusom s matematičkog stanovišta.

## Matematika i COVID-19

Osim statistike novooboljelih i umrlih od COVID-19 po zemljama i kontinentima, te objašnjenja osnovnih statističkih parametara iz [2], mi ćemo ovdje prikazati jedan (izvorni) jednostavni model širenja koronavirusa. Obradit ćemo intrigantno pitanje: koje su granice za šansu da vi, ili bilo koja nasumice odabrana osoba, bude kad-tad zaražena koronavirusom?

Često se u obraćanju javnosti epidemiologa i virusologa čuje kako je širenje koronavirusom eksponencijalno. Pritom oni (liječnici) uglavnom imaju u vidu broj  $R_0$  koji se zove stopa prijelaza (engl. *transmission rate*), a znači prosječni broj novozaraženih od jedne zaražene osobe. Općenito se smatra da je  $R_0$  za koronavirus između 1.4 i 2.5. (iako neke studije procjenjuju da je između 2.24 i 3.58). Kad je stopa  $R_0$  manja od 1, smatra se da se pandemija može obuzdati s odgovarajućim mjerama prevencija širenja (distanca, higijena, izolacija itd.). Kad bi ta stopa (brzina) prijelaza bila oko 2, onda bi jedna osoba (u prosjeku) zarazila dvije, svaka od njih opet dvije, svaka od njih dvoje novih itd., pa bi to bilo očito eksponencijalno brzo širenje kao i u poznatoj priči o šahu kad je oduševljen tom igrom kralj upitao izumitelja što želi kao nagradu, a ovaj "skromno" odgovori: jedno zrno žita na prvo polje šahovske ploče, dva na drugo, četiri na treće polje itd. duplo na svako naredno polje i konačno ono što je na zadnjem 64-om polju,  $2^{63}$  tj. oko  $10^{19}$ , odnosno deset puta milijarda puta milijarda, što bi iznosilo stotine godišnjih žetvi pšenice cijeloga svijeta, dakle, nemoguća misija. To je *eksponencijalni rast*,  $2^n$ . I to je manje-više odavno poznato i danas se to smatra gotovo trivijalnom opservacijom. Mi ćemo pokazati eksponencijalnost rasta korone s drugačijeg stanovišta. (O eksponencijalnoj funkciji i njezinom grafu vidi [5].)

## Matematički model širenja koronavirusa

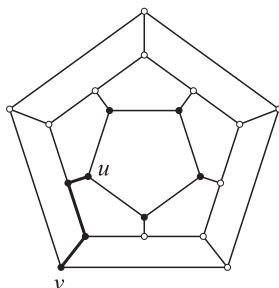
Sljedeći jednostavni model širenja koronavirusa daje odgovor na pitanje: U kojim je granicama vjerojatnost da ćete vi, vaš prijatelj ili bilo koja nasumice odabrana osoba kad-tad biti zaražena koronavirusom?

Za razumijevanje toga modela treba malo znanja iz osnovne, elementarne teorije grafova (vidi [6]).

Neka je  $G = (V, E)$  jednostavan povezan graf sa skupom vrhova  $V$ , brojem vrhova  $n = \#V$  i skupom bridova  $E$ . Možemo zamišljati da su vrhovi ljudi, a da brid spaja dvoje ljudi koji su bili u dovoljno bliskome kontaktu, manjem od 2 metra, barem 15 minuta bez zaštitnih maski. Za svaki vrh  $v \in V$ , označimo s  $N(v)$  skup svih

“bliskih” susjednih vrhova od  $v$  ( $N(v)$ , “neighbors” od  $v$ ). Točnije, skup susjeda  $N(v) = \{w \in V : vw \in E\}$ . Pretpostavimo da je broj svih susjeda svakog od vrhova najviše  $r$ , tj.  $\#N(v) \leq r$ , za svako  $v \in V$ . Drugim riječima, pretpostavljamo da je stupanj (engl. *degree*) svakog vrha najviše jednak  $r$ , simbolima  $\deg(v) \leq r$ , za svako  $v \in V$ . (Usput, uvjerite se da je zbroj stupnjeva svih vrhova iz  $G$  jednak dvostrukom broju bridova u  $G$ .)

Sada u “igru” dolazi koronavirus. Neka je  $K$  podskup skupa vrhova  $V$ , čije ćemo elemente zvati “inficirani” ili “zaraženi” ili “okuženi” koronavirusom. Uzmimo da je trenutno “zaraženih” vrhova  $k$ , tj.  $\#K = k$  (u vrijeme pisanja ovog teksta  $k$  je više od 25 milijuna na svijetu u kojem je  $n$  oko 8 milijardi; razumno je uzeti  $r = 10$ ; kad ćete čitati ovaj tekst,  $k$  će zasigurno biti puno veći). Konačno, neka je skup  $M_s = \{v \in V : d(v, K) \leq s\}$  skup svih vrhova iz  $V$  koji su na udaljenosti najviše  $s$  od “zaraženih” vrhova  $K$ . To znači da vrh  $v$  pripada skupu  $M_s$ , koji ćemo zvati “možebitno  $s$ -zaraženima” ili “potencijalno  $s$ -zaraženima”, ako postoji “zaraženi” vrh  $u \in K$  i najkraći put od  $u$  do  $v$  duljine najviše  $s$ . Put duljine  $s$  se sastoji od  $s$  susjednih bridova bez ponavljanja vrhova i bridova. (Za praktične svrhe, uzet ćemo  $s = 2$ , iako bi realnije bilo uzeti da je  $s$  jednak 3 ili čak 4 ili 5, ...), vidi sliku 2.



Slika 2. Crni vrhovi (unutarnjeg peterokuta) su “zaraženi”, čine skup  $K$ , i naznačen je (podebljani) put duljine 3 od “zaraženog”  $u$  do “možebitno 3-zaraženog” vrha  $v$ .

## Kolike su šanse da se zarazite?

Odredit ćemo granice vjerojatnosti da će nasumce izabrani vrh  $v \in V$  postati “zaražen”, tj. da je “možebitno  $s$ -zaražen”, odnosno da je  $v \in M_s$  iz našeg modela širenja koronavirusa. Točna vrijednost vjerojatnosti  $p$  da je  $v \in M_s$  je jednaka (“broj povoljnih / broj mogućih”):

$$p = \frac{\#M_s}{\#V} = \frac{\#M_s}{n}.$$

Kako je  $K$  podskup od  $M_s$ , a skup  $K$  (“inficiranih”) ima  $k$  elemenata, slijedi da je  $k = \#K \leq \#M_s$ , pa je

$$\frac{k}{n} \leq p.$$

Sada nađimo jednu gornju granicu za vjerojatnost  $p$ . Uočimo jedan “zaraženi” vrh  $u \in K$ . Taj vrh  $u$  ima  $\leq r$  susjeda. Svaki susjed  $w \in N(u)$  ima osim u još najviše  $r - 1$  susjeda. Dakle, s obzirom na “inficiranog”  $u$  imamo najviše  $r(r - 1)$  vrhova na

udaljenosti najviše 2 od “inficiranog” vrha  $u$ . Nastavimo i dalje tako, dobivamo najviše  $r(r-1)2$  vrhova na udaljenosti najviše 3 od  $u$  itd. Dakle, imamo najviše

$$1 + r + r(r-1) + r(r-1)^2 + \dots + r(r-1)^{s-1}$$

vrhova iz  $V$  koji su najviše  $s$  koraka od “zaraženog” vrha  $u$ . Kako svih (trenutno) “zaraženih” vrhova ima  $k = \#K$ , slijedi da skup  $M_s$  ima najviše

$$k[1 + r + r(r-1) + r(r-1)^2 + \dots + r(r-1)^{s-1}]$$

elemenata.

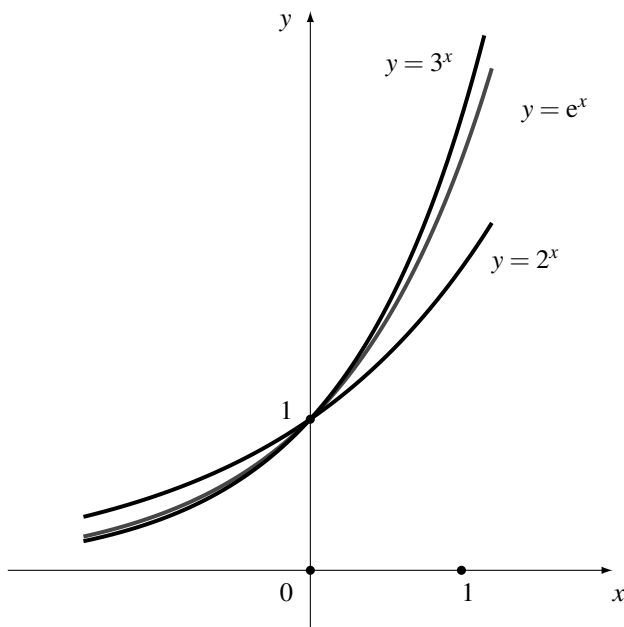
Prema tome, to je gornja granica za broj možebitno “zaraženih” vrhova iz skupa  $V$ . Stoga vjerojatnost  $p$  da će neki vrh  $v$  biti “zaražen” preko najviše  $s$  prenositelja leži u granicama

$$\frac{k}{n} \leq p \leq \frac{k[1 + r + r(r-1) + \dots + r(r-1)^{s-1}]}{n}.$$

Izraz u uglatoj zagradi možemo zbrojiti (geometrijski red). Za dovoljno velike  $r$  i  $s$  ovaj je izraz približno jednak  $rs$ . To je, dakle, eksponencijalna ovisnost o parametru  $s$  (udaljenost od zaraženih). Dakle,

$$\frac{k}{n} \leq p \leq \frac{kr^s}{n}. \quad (*)$$

Ako je  $kr^s \geq n$ , onda je gornja granica za  $p$  barem 1 i buduća da se ta granica ne može bitno poboljšati, vrlo je velika vjerojatnost (gotovo jednaka 1) da će po volji odabrani vrh  $v$  kad-tad postati “okužen”. Hoće li mnogi ljudi nakon ove pandemije shvatiti da je eksponencijalna funkcija vrlo prirodna i jedna od najčešćih u prirodi?! Pokušajte to objasniti i pokazati sliku 3 vašim prijateljima-nematematičarima.



Slika 3. Grafovi eksponencijalnih krivulja, [5].

## Malo brojaka

Još je 1907. godine slavni fizičar Lord Kelvin izjavio da je svaki rad bez brojki bezvrijedan. Zato evo nekih konkretnih brojki.

Uzmimo da je u našem modelu  $n = 8 \cdot 10^9$  (približan broj ljudi na Zemlji),  $k = 25 \cdot 10^6$  (ukupan broj zaraženih od koronavirusa do 24. kolovoza 2020.),  $r = 10$ ,  $s = 2$ . Tada malo računanja pokazuje da je vjerojatnost u procjeni (\*) između 0.0033 i 0.33. Drugim riječima, prema ovom jednostavnom matematičkom modelu, vjerojatnost ili šansa da se zarazite koronavirusom je između 0.33 i 33 %. Ta gornja međa se u bitnome ne može smanjiti, a znači da se svaki četvrti čovjek na našem planetu može zaraziti. O stopi smrtnosti možete naći u [2].

Već za  $s = 3$  gornja granica iz procjene (\*) prelazi 1 i u biti se ne može jako sniziti, pa je šansa za zarazu vrlo velika.

Pogledajmo sada Hrvatsku. Tu uzmimo  $n = 4 \cdot 10^6$ , trenutno uzmimo blizu  $k = 8000$  zaraženih,  $r = 10$ ,  $s = 2$ . Procjena (\*) daje raspon između 0.20 i 20 %. Dakle, prema ovom modelu oko 20 % Hrvata bi se moglo zaraziti koronavirusom. To je nešto bolje nego na svjetskoj razini, ali 20 % od 4 milijuna je 800 000, što je opet jako puno.

Uostalom, ovu 2020. godinu ćemo pamtiti kao 5P (pandemija, potresi, požari, poplave, peh).

## Zaključak

Pokazali smo na dva načina da se koronavirus širi eksponencijalno ili da se tu radi o kombinatornoj eksploziji. U Hrvatskoj je stanje sljedeće. Ako ste bili bliski s osobom koja je bila bliska s osobom koja je zaražena koronavirusom, onda je šansa da i vi postanete zaraženi približno za sada između 0.20 i 20 %. A u čitavom svijetu taj se raspon kreće između 0.33 i 33 %. U slučaju da ste 3 ili više koraka od zaraženih, gotovo je 100 % da ćete se zaraziti, ukoliko se ne držite mjera opreza, distanciranja, higijene, maske po potrebi i uopće uputa Stožera civilne zaštite RH i HZJZ ili WHO-a.

Nadajmo se da će se učinkovito cjepivo ubrzo razviti i spasiti mnoge ljudske živote od ubojitog koronavirusa (ili će naprasno nestati). Upamtite: Ako naprasno sam ne iščezne, zaraza koronavirusom će se širiti eksponencijalno!

## Literatura

- [1] koronavirus.hr
- [2] [https:// worldometers.info/coronavirus/](https://worldometers.info/coronavirus/)
- [3] *COVID-19 pandemic by country and teritory*, wikipedia.org
- [4] DARKO VELJAN, *Matematički model širenja koronavirusa*, panopticum.hr/matematicki-model-sirenja-koronavirusa 13. ožujka 2020.
- [5] ŽELJKO HANJŠ, DARKO ŽUBRINIĆ, *O Eulerovom broju e i odgovarajućoj eksponencijalnoj i logaritamskoj funkciji*, Matematičko-fizički list, 1/277, 2019/2020.
- [6] Darko Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.